

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)  
Γεωμετρία Β΄ Λυκείου ΕΠΑΛ**

**Εκφωνήσεις**



**2024-2025**

**Ασκησόπολις**

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

**[www.Askisopolis.gr](http://www.Askisopolis.gr)**



Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-archiki-selida>)

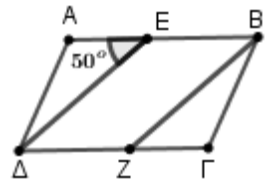
## Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

### Παραλληλόγραμμο

#### 2<sup>ο</sup> Θέμα

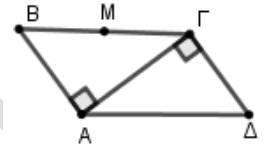
**14501.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τα σημεία  $E, Z$  των πλευρών  $AB, \Gamma\Delta$  αντίστοιχα, ώστε  $BE = \Delta Z$  και  $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 50^\circ$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $BZ\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμο.  
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}$  και  $\hat{B}\hat{Z}\hat{\Delta}$ .



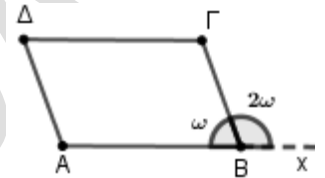
**14503.** Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος έχουν κοινή πλευρά την  $A\Gamma$  και  $AB = \Gamma\Delta$ .

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  είναι παράλληλες.  
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.  
γ) Αν  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  και  $A\Delta = 8$ , να βρείτε το μήκος του  $BM$ .



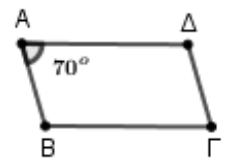
**14504.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο και  $Bx$  προέκταση της πλευράς του  $AB$  προς το  $B$ .

- α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση: Στο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος παράλληλες είναι οι πλευρές ..... και απέναντι γωνίες είναι οι .....  
β) Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος να δείξετε ότι  $\hat{\omega} = 60^\circ$ .  
γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών  $\hat{A}, \hat{\Delta}$  και  $\hat{\Gamma}$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .  
Να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα την απάντησή σας.



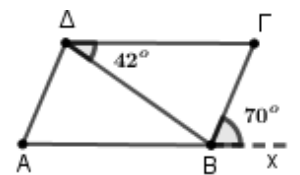
**14515.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = 70^\circ$ ,  $AB = 5$  και  $B\Gamma = 2AB$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $\hat{B} = 110^\circ$ .  
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{\Gamma}, \hat{\Delta}$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .  
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .



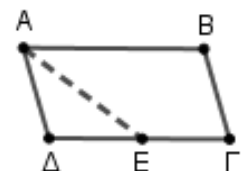
**14516.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο και  $Bx$  η προέκταση της πλευράς του  $AB$  προς το  $B$ .

- α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση: «Στο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι οι πλευρές ..... όπως και οι πλευρές ....., απέναντι δε γωνίες είναι οι ..... και οι .....»  
β) Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και τις γωνίες που σημειώνονται πάνω στο σχήμα, να υπολογίσετε με τη σειρά που ζητούνται:  
i. Το μέτρο της γωνίας  $\hat{A}$ .  
ii. Το μέτρο της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ .  
iii. Το μέτρο της γωνίας  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{A}$ .  
Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



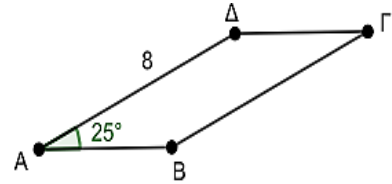
**14580.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με  $A\Delta < AB$ . Η διχοτόμος της γωνίας του  $\hat{A}$  τέμνει την πλευρά  $\Delta\Gamma$  σε σημείο  $E$ .

- α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες  $\hat{B}\hat{A}\hat{E}$  και  $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$  είναι ίσες και στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.  
β) Αν είναι  $AB = 2A\Delta$ , να αποδείξετε ότι  $\Gamma\Delta = 2\Delta E$ .



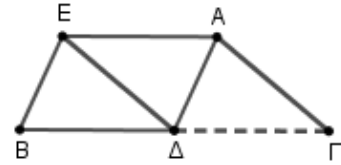
**18199.** Στο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{A} = 25^\circ$  και  $A\Delta = 8$ .  
Να υπολογίσετε:

- α)** Το μέτρο της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .  
**β)** Το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .  
**γ)** Τα μέτρα των υπόλοιπων γωνιών του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .



**19819.** Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο  $BEA\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. Η παράλληλη από το  $A$  προς την  $E\Delta$  (δηλαδή η  $A\Gamma$ ), τέμνει την προέκταση της  $B\Delta$  προς το  $\Delta$  σε σημείο  $\Gamma$ .

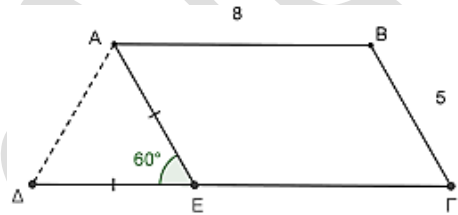
- α)** Να εξηγήσετε γιατί το τμήμα  $EA$  είναι παράλληλο στο τμήμα  $\Delta\Gamma$ .  
**β)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EA\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.  
**γ)** Αν  $\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $A\hat{E}\Delta$ .



**19824.** Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο με  $B\Gamma = 5$  και  $AB = 8$ .

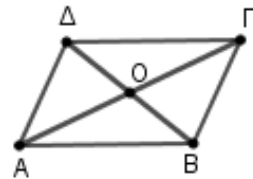
Στην προέκταση της  $GE$  προς το  $E$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $AE = E\Delta$  και  $\hat{A}\hat{E}\Delta = 60^\circ$ .

- α)** Να δείξετε ότι:  
**i.**  $AE = 5$  και  $E\Gamma = 8$ .  
**ii.**  $\Delta E = A\Delta = 5$ .  
**γ)** Να υπολογίσετε την περίμετρο  $\Pi$  του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ .



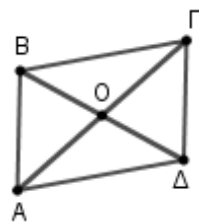
**19832.** Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις  $AB, \Delta\Gamma$  και  $A\Delta, B\Gamma$  και διαγωνίους  $A\Gamma$  και  $\Delta B$ , οι οποίες τέμνονται σε σημείο  $O$ . Αν επιπλέον είναι  $A\Gamma = 5$ ,  $O\Delta = 2,1$  και  $AB = 4,2$ , να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

- α)** Να βρείτε το μήκος της πλευράς  $\Delta\Gamma$ .  
**β)** Να βρείτε  
**i.** το μήκος της διαγωνίου  $\Delta B$ , **ii.** το μήκος του τμήματος  $O\Gamma$ .



**19833.** Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις  $AB, \Delta\Gamma$  και  $A\Delta, B\Gamma$ , το σημείο  $O$  είναι το κέντρο του, και  $A\Delta = \Delta\Gamma = 5$ . Να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

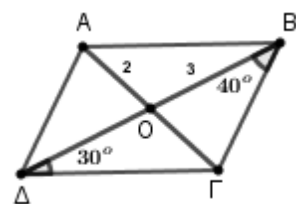
- α)** Να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  και να υπολογίσετε την περίμετρό του.  
**β)** Να βρείτε το μέτρο της γωνίας  $A\hat{O}\Delta$ .  
**γ)** Αν είναι  $O\Delta = 3$  και  $A\Gamma = 8$ , να βρείτε τα μήκη των τμημάτων  $\Delta B$  και  $O\Gamma$ .



**20946.** Στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού

σχήματος ισχύουν  $AB = \Gamma\Delta$  και  $AB \parallel \Gamma\Delta$ . Παίρνοντας υπόψιν και τα υπόλοιπα δεδομένα όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα, να υπολογίσετε:

- α)** Τα μήκη των τμημάτων  $O\Gamma$ ,  $O\Delta$ , όπου  $O$  είναι το σημείο τομής των  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$ .  
**β)** Τα μέτρα των γωνιών  $A, B, \Gamma, \Delta$  του τετραπλεύρου.



**4<sup>ο</sup> Θέμα**

**14554.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A\Delta < AB$ , τη διχοτόμο της γωνίας του  $\hat{A}$  η οποία τέμνει την πλευρά του  $\Delta\Gamma$  σε σημείο  $E$  και τους ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 1: «Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $A$ ,  $\Delta$  και  $E$  είναι ισοσκελές».

Ισχυρισμός 2: «Το τμήμα  $\Delta E$  είναι ίσο με την πλευρά  $B\Gamma$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ ».

**α)** Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παραπάνω ισχυρισμούς ως αληθή ή ψευδή, αιτιολογώντας την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

**β)** Ποιο θα είναι το μέτρο των γωνιών του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  ώστε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $A$ ,  $\Delta$  και  $E$  να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

## Ορθογώνιο

### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**21394.** Στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος οι  $\Delta A$  και  $B\Gamma$  είναι κάθετες στην  $\Delta B$  και επίσης είναι  $A\Delta = B\Gamma = 3$ .

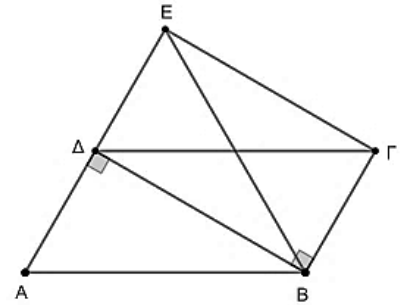
**α)** Να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β)** Προεκτείνουμε την  $A\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta E = 3$ .

Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τετράπλευρο  $\Delta B\Gamma E$  είναι ορθογώνιο.

**ii.** Το τρίγωνο  $BAE$  είναι ισοσκελές.



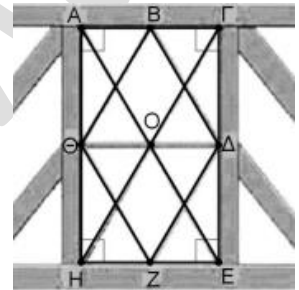
## Ρόμβος

### 2<sup>ο</sup> Θέμα

**14505.** Στην εικόνα που ακολουθεί, υπάρχει το σχέδιο ενός παραθύρου με  $B\Delta = \Delta Z = Z\Theta = \Theta B$  και τις γωνίες  $\hat{A}\hat{\Gamma}E$ ,  $\hat{\Gamma}\hat{E}H$ ,  $\hat{E}\hat{H}A$ ,  $\hat{H}\hat{A}\Gamma$  ορθές.

**α)** Τι είδους τετράπλευρα είναι τα  $B\Delta Z\Theta$  και  $A\Gamma E H$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**β)** Ένας μαθητής λέει «τα τμήματα  $A E$  και  $\Gamma H$  είναι ίσα μεταξύ τους» και μια μαθήτρια, όταν το άκουσε, συμπλήρωσε «και τα  $A O$ ,  $O E$ ,  $\Gamma O$  και  $O H$  είναι ίσα μεταξύ τους». Συμφωνείτε με τους ισχυρισμούς που διατύπωσαν ο μαθητής και η μαθήτρια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

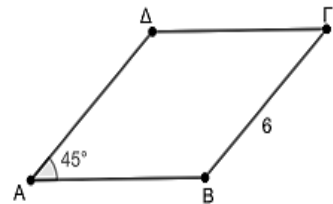


**18200.** Στον ρόμβο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{A} = 45^\circ$  και  $B\Gamma = 6$ .

**α)** Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  του ρόμβου.

**β)** Να υπολογίσετε τα μήκη των υπόλοιπων πλευρών του ρόμβου.

**γ)** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών  $B$  και  $\Delta$  είναι ίσο με τρεις ορθές.

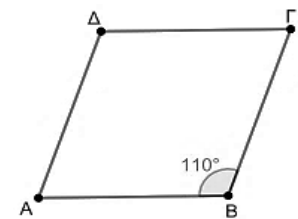


**18201.** Στον ρόμβο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{B} = 110^\circ$ .

**α)** Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\Delta$  του ρόμβου.

**β)** Να σχεδιάσετε τη διαγώνιο του ρόμβου από την κορυφή  $\Delta$ .

**γ)** Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\hat{A}\hat{B}\Delta$ .

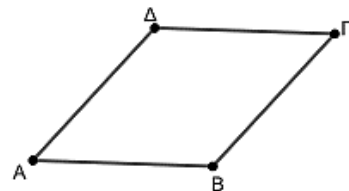


**18202.** Ο ρόμβος  $AB\Gamma\Delta$  έχει περίμετρο 48.

**α)** Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ρόμβου.

**β)** Να σχεδιάσετε τις διαγωνίους του ρόμβου.

**γ)** Αν  $K$  είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου και το ευθύγραμμο τμήμα  $BK$  έχει μήκος 5, να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου  $B\Delta$  του ρόμβου.



**20082.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  η πλευρά  $AB$  είναι διπλάσια της πλευράς του  $B\Gamma$ . Αν  $E, Z$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα,

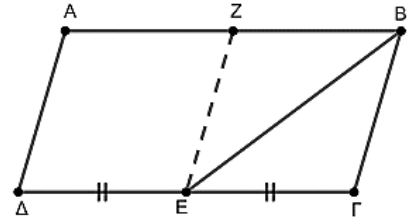
**α)** Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα  $AEZ\Delta$  και  $BEZ\Gamma$  είναι ρόμβοι.

**β)** Τι είδους τετράπλευρο είναι το  $AE\Gamma Z$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**20087.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $AB=2B\Gamma$  και  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $\Gamma\Delta$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι το τμήμα  $BE$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{B}$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .

**β)** Αν το σημείο  $Z$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$ , τι είδους τετράπλευρο είναι το  $ZB\Gamma E$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**19839.** Τα τρίγωνα  $ABK$  και  $\Gamma\Delta\Lambda$  του σχήματος είναι ίσα και ισοσκελή με  $AB = AK$  και  $\Gamma\Lambda = \Gamma\Delta$  αντίστοιχα.

Τα σημεία  $\Lambda$  και  $K$  είναι τα μέσα των  $BK$  και  $\Delta\Lambda$  αντίστοιχα.

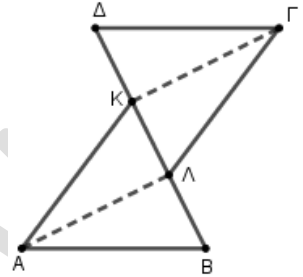
**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $AK = \Gamma\Lambda$ .

**ii.**  $AK = \Gamma K$ .

**iii.** Το τετράπλευρο  $AK\Gamma\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β)** Θα μπορούσε το παραλληλόγραμμο  $AK\Gamma\Lambda$  να είναι ρόμβος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



**20088.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  η πλευρά  $AB$  είναι διπλάσια της πλευράς του  $B\Gamma$ .

Αν  $E, Z$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα,

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Τα τετράπλευρα  $AEZ\Delta$  και  $BEZ\Gamma$  είναι ρόμβοι.

**ii.** Το τετράπλευρο  $AE\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β)** Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία  $\hat{B}$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ , ώστε το τετράπλευρο  $AE\Gamma Z$  είναι ρόμβος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

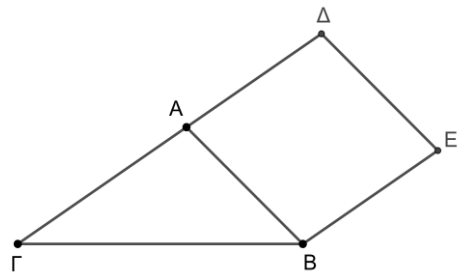
**21404.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $\Gamma A$  κατά τμήμα  $A\Delta = AB$ . Από τα  $B$  και  $\Delta$  φέρνουμε παράλληλες, αντίστοιχα προς τις  $A\Delta$  και  $AB$ , οι οποίες τέμνονται στο  $E$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ABE\Delta$  είναι ρόμβος.

**β)** Έστω ότι  $AB = 4$ ,  $A\Gamma = 5$  και  $B\Gamma = 7$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και ο ρόμβος  $ABE\Delta$  έχουν ίσες περιμέτρους.

**γ)** Έστω ότι  $AB = \gamma$ ,  $A\Gamma = \beta$ ,  $B\Gamma = \alpha$  και ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και ο ρόμβος  $ABE\Delta$  έχουν ίσες

περιμέτρους. Να αποδείξετε ότι  $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{3}$ .



## Τετράγωνο

### 2<sup>ο</sup> Θέμα

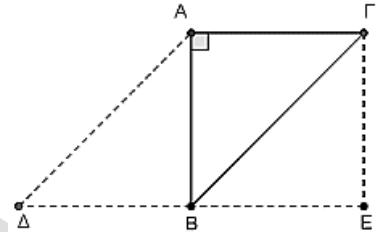
**14502.** Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 2AD$  και τα μέσα  $E, Z$  των πλευρών  $AB, \Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)** το τετράπλευρο  $A\epsilon\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο,  
**β)** το τετράπλευρο  $A\epsilon Z\Delta$  είναι τετράγωνο.

**19831.** Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $AB = A\Gamma = 12$ . Έστω ότι η παράλληλη από το σημείο  $\Gamma$  στην  $AB$  και η παράλληλη από το σημείο  $B$  στην  $A\Gamma$  τέμνονται στο σημείο  $E$ .

**α)** Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο  $A\Gamma\epsilon B$  είναι τετράγωνο και να υπολογίσετε την περιμέτρό του.

**β)** Αν η παράλληλη από το  $A$  στην πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνει την ευθεία  $BE$  (προς το μέρος του  $B$ ) σε σημείο  $\Delta$ , να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου  $A\Gamma B\Delta$ . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



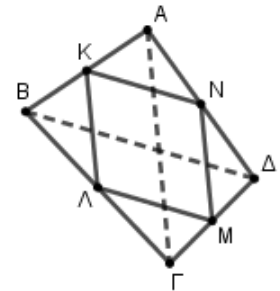
### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**21843.** Έστω τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  και  $K, \Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$  και  $\Delta A$  αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι η περίμετρος  $\Pi$  του τετραπλεύρου  $K\Lambda M N$  είναι  $\Pi = A\Gamma + B\Delta$ .

**β) i.** Αν το  $K\Lambda M N$  είναι ορθογώνιο να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του  $AB\Gamma\Delta$  είναι κάθετες μεταξύ τους.

**ii.** Ποια επιπλέον ιδιότητα πρέπει να έχουν οι διαγώνιοι του  $AB\Gamma\Delta$  ώστε το  $K\Lambda M N$  να είναι τετράγωνο;



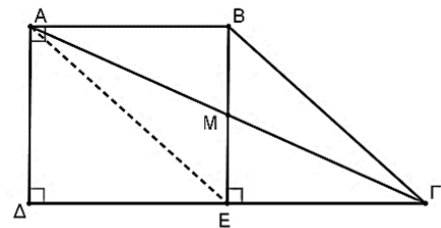
**22563.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Delta\Gamma$ ,  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\Gamma\Delta = 2AB$  και  $B\hat{\Gamma}\Delta = 45^\circ$ . Έστω  $BE$  κάθετη στη  $\Gamma\Delta$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $M$ .

Να αποδείξετε ότι :

**α)** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β) i.** Το τρίγωνο  $B\epsilon\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**ii.** Το τετράπλευρο  $AB\epsilon\Delta$  είναι τετράγωνο.





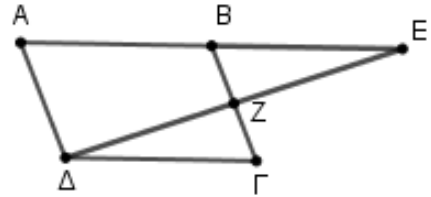
## Εφαρμογές παραλληλογράμμου

2<sup>ο</sup> Θέμα

**14560.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και σημείο  $E$  στην προέκταση της πλευράς  $AB$  προς το  $B$ , ώστε  $AB = BE$ .

Έστω  $Z$  το σημείο τομής των  $B\Gamma$ ,  $\Delta E$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι το  $Z$  είναι το μέσο του  $\Delta E$ .  
**β)** Αν  $B\Gamma = 10$ , να βρείτε το μήκος του  $BZ$ .



**20840.** Οι πλευρές  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  έχουν μήκη 6, 8 και 12 αντίστοιχα. Τα σημεία  $K$ ,  $\Lambda$  και  $M$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  με τη σειρά που δίνονται.

- α)** Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο  $K\Lambda\Gamma M$  είναι παραλληλόγραμμο.  
**β)** Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου  $K\Lambda\Gamma M$ .

**20843.** Τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει περίμετρο 28. Τα σημεία  $K, \Lambda$  και  $M$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB, A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

- α)** Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο  $K\Lambda\Gamma M$  είναι παραλληλόγραμμο.  
**β)** Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $K\Lambda M$ .

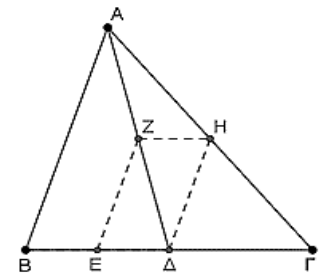
4<sup>ο</sup> Θέμα

**19275.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσός του  $A\Delta$ . Τα σημεία  $E, Z$  και  $H$  είναι τα μέσα των  $B\Delta, A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

**α)** Να δικαιολογήσετε γιατί:

**i.**  $\Delta H = // \frac{AB}{2}$       **ii.**  $ZE = // \frac{AB}{2}$ .

- β)** Να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $ZH\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμο.  
**γ)** Ποια πρέπει να είναι η σχέση των  $AB$  και  $B\Gamma$ , ώστε το  $ZH\Delta E$  να είναι ρόμβος;



**19840.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του σχήματος που ακολουθεί τα  $K, \Lambda$  και  $M$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB, A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

**α)** Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας:

**i.** Αν είναι  $K\Lambda = 6$ , τότε το  $B\Gamma$  είναι ίσο με:

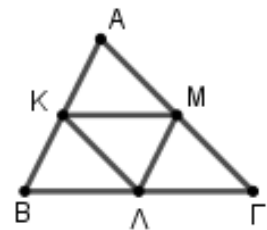
A: 6      B: 12      Γ: 3      Δ: 16

**ii.** Αν είναι  $K\Lambda + \Lambda M + KM = 12$ , τότε το άθροισμα  $AB + B\Gamma + A\Gamma$  είναι ίσο με:

A: 12      B: 6      Γ: 24      Δ: 16

**β)** Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Πρόταση :

«Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο, τότε το τετράπλευρο  $K\Lambda MB$  είναι ρόμβος».



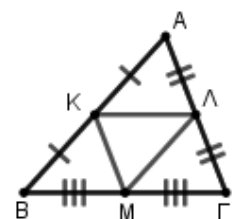
**20846.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $K, \Lambda$  και  $M$  των πλευρών  $AB, A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

**α)** Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο  $K\Lambda MB$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β)** Να γράψετε όλα τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται με κορυφές τέσσερα από τα σημεία  $A, B, \Gamma, K, \Lambda$  και  $M$ .

**γ)** Αν επιπλέον δίνεται ότι το τετράπλευρο  $AKM\Lambda$  είναι ορθογώνιο να βρείτε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις γωνίες του.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



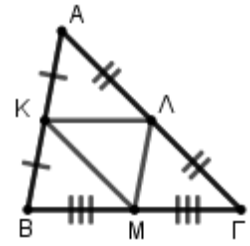
**20844.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $K, \Lambda$  και  $M$  των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

**α)** Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο  $K\Lambda\Gamma M$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β)** Να γράψετε όλα τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται με κορυφές 4 από τα σημεία  $A, B, \Gamma, K, \Lambda$  και  $M$ .

**γ)** Αν επιπλέον δίνεται ότι το τετράπλευρο  $AKM\Lambda$  είναι ρόμβος να βρείτε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις πλευρές του.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



**20848.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $K, \Lambda$  και  $M$  των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

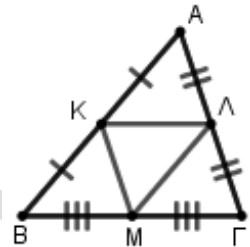
**α)** Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο  $AKM\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β)** Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ :

**i.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AKM\Lambda$  είναι ρόμβος.

**ii.** Ποιο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας  $\hat{A}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  ώστε το τετράπλευρο  $AKM\Lambda$  να είναι τετράγωνο;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

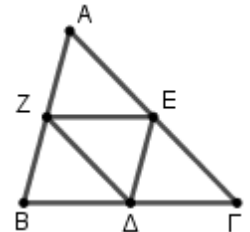


**20948.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του διπλανού σχήματος τα  $\Delta, E, Z$  είναι μέσα των πλευρών του. Αν  $B\Gamma = 10$ ,  $\Delta Z = 4$  και  $\Delta E = 2,5$ :

**α)** να αποδείξετε ότι  $ZE \parallel B\Gamma$ .

**β)** να υπολογίσετε το μήκος της  $ZE$ .

**γ)** να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών  $AB, A\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



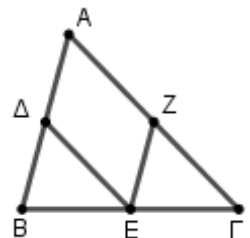
**21402.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και έστω  $\Delta, E$  και  $Z$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta EZ$  είναι ρόμβος.

**β)** Αν  $\hat{B} = 75^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του ρόμβου  $A\Delta EZ$ .

**γ)** Ποιο θα πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας  $\hat{B}$  ώστε το τετράπλευρο  $A\Delta EZ$  να είναι τετράγωνο;

Τι τρίγωνο είναι τότε το  $AB\Gamma$ ;



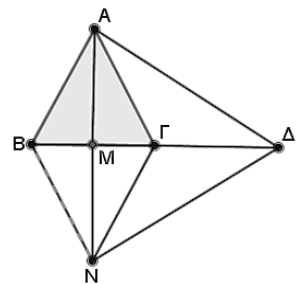
**21844.** Δίνεται οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και το ύψος του  $AM$ . Προεκτείνουμε το  $AM$  κατά τμήμα  $MN = AM$ .

και τη  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τετράπλευρο  $ABN\Gamma$  είναι ρόμβος.

**β)** Το τρίγωνο  $A\Delta N$  είναι ισοσκελές.

**γ)** Η προέκταση της  $A\Gamma$  τέμνει τη  $\Delta N$  στο μέσον της.

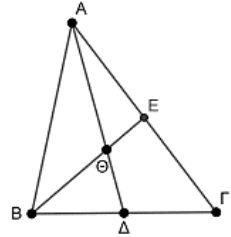


## Βαρύκεντρο τριγώνου

### 2ο Θέμα

**19514.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  το  $\Delta$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  και το  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $A\Gamma$ . Δίνονται τα μήκη  $A\Delta = 12$  και  $\Theta E = 3$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $\Theta\Delta = 4$ .
- β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων  $BE$  και  $B\Theta$ .
- γ) Να σχεδιάσετε τη διάμεσο  $\Gamma Z$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

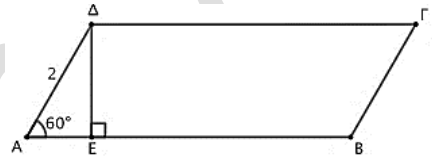


## Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

### 2° Θέμα

**18304.** Δίνεται το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος με  $A\Delta = 2$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$  και  $\hat{A\Delta\Gamma}$ .
- β) Αν  $\Delta E$  είναι ύψος του παραλληλογράμμου, τότε:
  - i. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{A\Delta E}$ .
  - ii. Να αποδείξετε ότι  $AE = 1$ .



**14552.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με  $A\Delta < AB$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ .

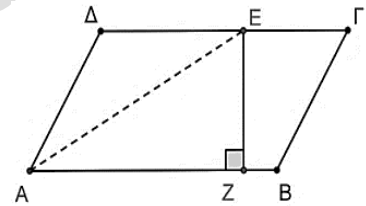
Η  $AE$  είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  η οποία τέμνει την πλευρά  $\Delta\Gamma$  σε σημείο  $E$  και η  $EZ$  είναι η κάθετη από το  $E$  στην πλευρά  $AB$ . Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε καθένα από τα ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

α) Αν είναι  $A\Delta = 6$ , τότε το  $\Delta E$  είναι ίσο με:

A: 6      B: 12      Γ: 3      Δ: 16

β) Αν η κάθετη που άγεται από το  $E$  προς την ευθεία  $AB$  τέμνει την πλευρά  $AB$  σε σημείο  $Z$ , τότε:

A:  $AE = EZ$     B:  $AE = \frac{1}{2}EZ$     Γ:  $AE = 2EZ$     Δ:  $AE = 3EZ$



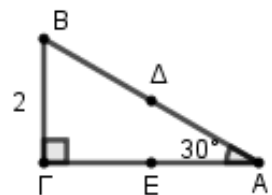
**20945.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του διπλανού σχήματος δίνονται

$\hat{A} = 30^\circ$ ,  $B\Gamma = 2$  και τα σημεία

$\Delta$ ,  $E$  μέσα των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε:

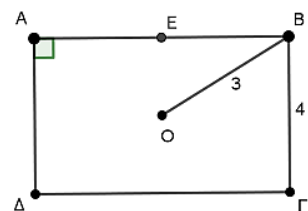
- α) το μήκος του  $\Delta E$ .
- β) το μήκος της πλευράς  $AB$ .
- γ) το μήκος του  $\Gamma\Delta$ .



**20951.** Δίνεται το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος, στο οποίο το  $O$  είναι το κέντρο του και το τμήμα  $OB = 3$ .

Αν  $E$  είναι το μέσο της  $AB$  και η  $B\Gamma = 4$  τότε:

- α) να χαράξετε τις διαγώνιες  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  του ορθογωνίου και να υπολογίσετε τα μήκη τους.
- β) να υπολογίσετε το μήκος του  $OE$ .

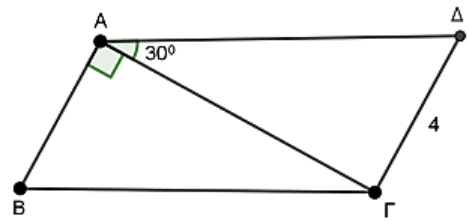


**21012.** Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο στο οποίο η διαγώνιος  $A\Gamma$  είναι κάθετη στην πλευρά του  $AB$ . Επίσης η πλευρά του  $\Gamma\Delta = 4$  και η γωνία  $\Gamma A\Delta$  ισούται με  $30^\circ$ .

**α)** Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία  $B\Gamma\Delta$ .

**β)** Πόσο είναι το μήκος της πλευράς  $AB$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**γ)** Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$ .



**22095.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma = 12$  και το ύψος του  $A\Delta$ .

Έστω  $E$  και  $Z$  τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = 6$  και  $\Delta Z = 6$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta E Z$  είναι ρόμβος.



#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**19842.** Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο  $EA\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο με  $EA = 2 A\Delta$ . Η παράλληλη από το  $E$  προς την  $A\Delta$  τέμνει την προέκταση της  $\Gamma\Delta$  προς το  $\Delta$  σε σημείο  $B$ .

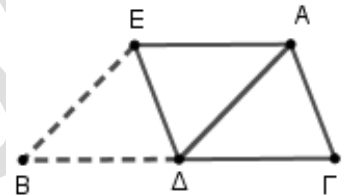
**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τμήμα  $EA$  είναι παράλληλο στο τμήμα  $B\Delta$ .

**ii.** Το τετράπλευρο  $EA\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο.

**iii.** Το σημείο  $\Delta$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$  και ότι  $B\Gamma = 4 A\Delta$ .

**β)** Αν το παραλληλόγραμμο  $EA\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος, να βρείτε το είδος του τριγώνου  $B\Gamma E$  ως προς τις γωνίες του.

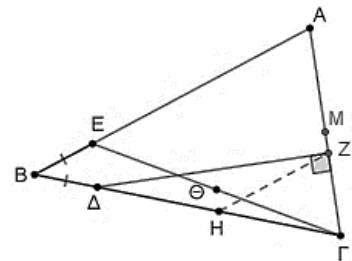


**20557.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημεία  $\Delta$  και  $E$  στις πλευρές  $B\Gamma$  και  $BA$  αντίστοιχα, ώστε  $B\Delta = BE$ . Φέρνουμε την  $\Delta Z$  κάθετη στην  $A\Gamma$ . Θεωρούμε τα μέσα  $H, \Theta, M$  των  $\Delta\Gamma, E\Gamma, A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $ZH = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ .

**β)**  $M\Theta = \frac{AE}{2}$ .

**γ)** Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις πλευρές του, ώστε  $ZH = M\Theta$ ;



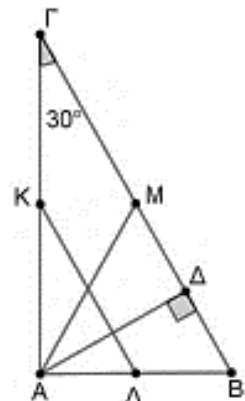
**20558.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Έστω  $K, \Lambda, M$  τα μέσα των πλευρών  $A\Gamma, AB, B\Gamma$  αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $K\Lambda = AM$ .

**ii.** Το  $AKM\Lambda$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

**β)** Έστω  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  και  $A\Delta$  ύψος του τριγώνου. Προεκτείνουμε το  $A\Delta$  κατά ίσο τμήμα  $\Delta Z$ . Τι είδους τετράπλευρο είναι το  $AMZB$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

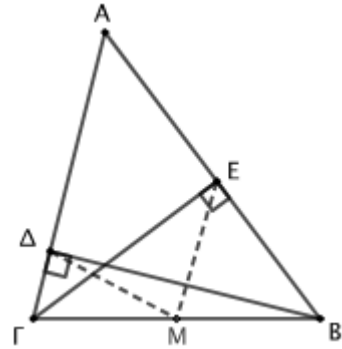


**21003.** Σε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  θεωρούμε τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , τότε:

**α)** Να αποδείξετε ότι  $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι  $\Delta M = EM$ .

**γ)** Να εξετάσετε αν τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$ ,  $B$  και  $\Gamma$  ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

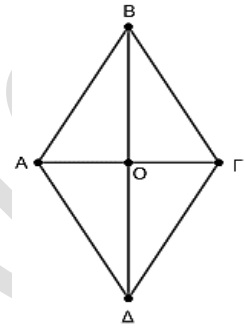


**21392.** Στο διπλανό σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος με κέντρο  $O$ ,  $AB = 4$  και  $OA = 2$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η γωνία  $ABO = 30^\circ$ .

**β)** Να βρείτε τρεις γωνίες στο διπλανό σχήμα, εκτός της  $\hat{A}\hat{B}O$ , που έχουν μέτρο  $30^\circ$ . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**γ)** Να βρείτε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα στο παρακάτω σχήμα, εκτός του  $AB$ , που έχουν μήκος 4. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



### 3<sup>ο</sup> Θέμα

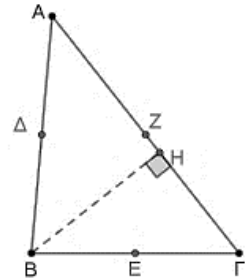
**21060.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Φέρνουμε το ύψος  $BH$ . Να αποδείξετε ότι:

**α) i.**  $Z\Delta = E\Gamma$

**ii.**  $HE = E\Gamma$ .

**β)** Η  $\Delta E$  είναι παράλληλη στην  $A\Gamma$ .

**γ)**  $\Delta H = ZE$ .



## Τραπεζίο

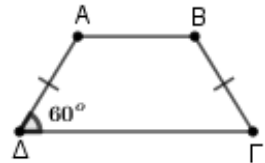
### 2<sup>ο</sup> Θέμα

**14517.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  με  $\Delta\Gamma = 2AB$  και ίσες πλευρές  $A\Delta$  και  $B\Gamma$ .

Αν είναι  $AB = A\Delta = B\Gamma = 12$  και  $\hat{\Delta} = 60^\circ$ , να υπολογίσετε:

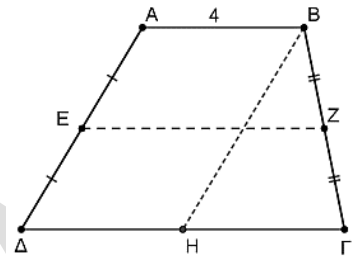
- α)** τις γωνίες του τραπέζιου.  
**β)** την περίμετρο του τραπέζιου.

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



**18158.** Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ), έχουμε  $AB = 4$  και  $\Delta\Gamma = 8$ .

- α)** Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου του  $EZ$ .  
**β)** Από το  $B$  φέρουμε  $BH$  παράλληλη στην  $A\Delta$ .  
 Να αποδείξετε ότι  $\Gamma H = AB$ .

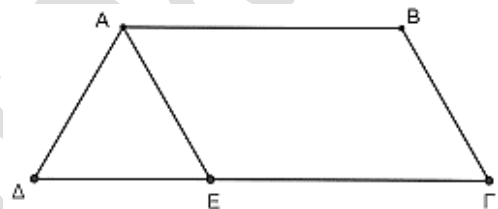


**19821.** Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές  $AB$ ,  $\Delta\Gamma$  και ίσες πλευρές τις  $A\Delta$  και  $B\Gamma$ . Η παράλληλη από το  $A$  στην  $B\Gamma$ , δηλαδή η  $AE$ , τέμνει την πλευρά  $\Delta\Gamma$  σε σημείο  $E$ .

- α)** Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση:

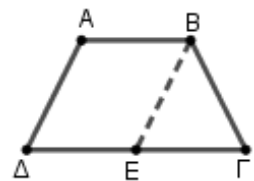
«Στο ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι η πλευρά ..... με την πλευρά ....., οι προκείμενες γωνίες στη βάση του  $AB$  είναι η γωνία ..... και η γωνία ..... και οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του  $\Delta\Gamma$  είναι η γωνία ..... και η γωνία .....

- β)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο.  
**γ)** Αν είναι  $B\Gamma = 5$ , να δείξετε ότι  $A\Delta = AE = 5$ .



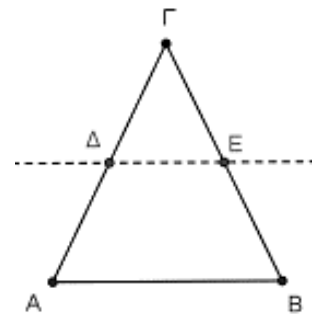
**19826.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις  $AB$  και  $\Delta\Gamma$ ,  $A\Delta = B\Gamma$  και η  $BE$  είναι παράλληλη στην  $A\Delta$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ABE\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.  
**β)** Αν είναι  $AB = A\Delta = 12$  και  $\Delta\Gamma = 2AB$ ,  
**i.** να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου  $ABE\Delta$ .  
**ii.** να δείξετε ότι το σημείο  $E$  είναι το μέσο του τμήματος  $\Delta\Gamma$ .



**19834.** Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  του σχήματος είναι ισοσκελές με  $\Gamma A = \Gamma B = 8$ , το σημείο  $\Delta$  είναι το μέσο της πλευράς του  $A\Gamma$  και η ευθεία  $\Delta E$  είναι παράλληλη στην πλευρά του  $AB$ , όπου  $AB = 6$ .

- α)** Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $\Gamma B$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .  
**β)** Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων  $\Delta E$ ,  $\Delta A$  και  $EB$ , αιτιολογώντας την απάντησή σας.  
**γ)** Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο  $A\Delta E B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε την περίμετρό του.



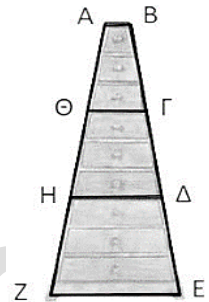
**35259.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Από το μέσο  $\Delta$  της πλευράς  $A\Gamma$  φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $E$ .



- α) Να αιτιολογήσετε ότι  $\Gamma\Delta = BE$ .  
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Gamma BE\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

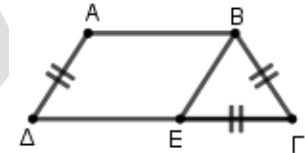
#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**14581.** Στην εικόνα που ακολουθεί παρουσιάζεται το σχέδιο μιας κατασκευής τριών μερών με συρτάρια. Τόσο η κατασκευή όσο και τα επιμέρους τμήματά της είναι σχήματος τραπέζιου. Συγκεκριμένα, το τετράπλευρο  $ABEZ$  του σχεδίου της κατασκευής είναι τραπέζιο με βάσεις  $AB$  και  $ZE$ , το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Theta$  είναι τραπέζιο με βάσεις  $AB$  και  $\Theta\Gamma$ , το τετράπλευρο  $\Theta\Gamma\Delta H$  είναι τραπέζιο με βάσεις  $\Theta\Gamma$  και  $H\Delta$  καθώς και το τετράπλευρο  $H\Delta EZ$  είναι τραπέζιο με βάσεις  $H\Delta$  και  $ZE$ . Επιπλέον, τα  $\Theta$ ,  $H$  και  $\Gamma$ ,  $\Delta$  είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών  $AZ$ ,  $BE$  αντίστοιχα του τραπέζιου  $ABEZ$ .



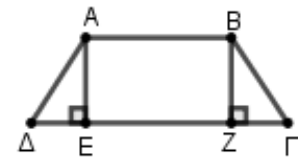
- α) Να εξηγήσετε γιατί οι βάσεις  $AB$ ,  $\Theta\Gamma$ ,  $H\Delta$  και  $ZE$  των επιμέρους τραπέζιων είναι παράλληλες.  
 β) Έστω ότι τα σημεία  $\Theta$  και  $\Gamma$  είναι τα μέσα των  $AH$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα, ενώ τα σημεία  $H$  και  $\Delta$  είναι τα μέσα των  $\Theta Z$  και  $\Gamma E$  αντίστοιχα. Αν είναι  $AB = 13,5$  cm και  $H\Delta = 50,5$  cm, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων:  
 i.  $\Theta\Gamma$       ii.  $ZE$

**16767.** Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος με  $A\Delta // B\Gamma$  και  $B\Gamma > \Delta\Gamma$ . Στην πλευρά  $B\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $E$ , τέτοιο ώστε  $\Gamma E = \Gamma\Delta$ .



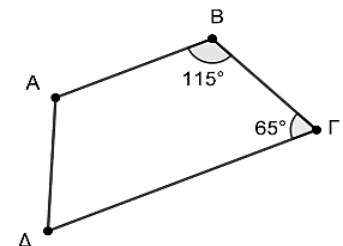
- α) Να αποδείξετε ότι:  
 i. οι γωνίες  $\hat{A}\hat{D}E$  και  $\hat{G}\hat{E}\hat{D}$  είναι ίσες.  
 ii. η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της  $A\hat{\Delta}\hat{G}$ .  
 β) Πόσες μοίρες πρέπει να είναι η γωνία  $A$  ώστε το τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  να είναι ισόπλευρο;

**21399.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με βάσεις  $AB = 4$  και  $\Gamma\Delta = 8$ ,  $B\Gamma = A\Delta = 4$  και τα ύψη του  $AE$  και  $BZ$ .



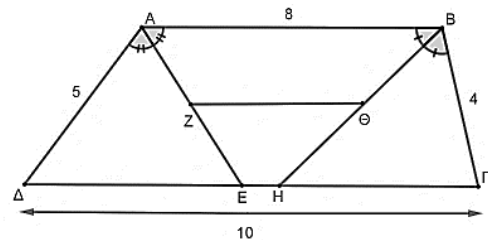
- α) Να αποδείξετε ότι:  
 i.  $EZ = 4$     ii.  $\Delta E = \Gamma Z = 2$     iii.  $\hat{\Delta}\hat{A}E = 30^\circ$ .  
 β) Να βρείτε τα μέτρα των προσκείμενων γωνιών σε κάθε βάση του τραπέζιου.

**35394.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του παρακάτω σχήματος έχει γωνίες  $\hat{B} = 115^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 65^\circ$ . Αν οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε να αποδείξετε ότι:



- α) i.  $\hat{A} = 115^\circ$  και  $\hat{\Delta} = 65^\circ$ ,  
 ii. το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές του  $AB$  και  $\Delta\Gamma$ .  
 β) Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**21846.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB // \Gamma\Delta$  και  $AB = 8$ ,  $B\Gamma = 4$ ,  $\Gamma\Delta = 10$  και  $A\Delta = 5$ . Οι διχοτόμοι των γωνιών  $A$  και  $B$  τέμνουν την  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $E$  και  $H$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



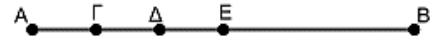
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $B\Gamma H$  είναι ισοσκελή με βάσεις τις  $AE$  και  $BH$  αντίστοιχα.  
 β) Να υπολογίσετε το  $EH$ .

- γ) Αν  $Z$  και  $\Theta$  είναι τα μέσα των  $AE$  και  $BH$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $Z\Theta = \frac{9}{2}$ .

## Αναλογίες

### Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο 2<sup>ο</sup> Θέμα

**19516.** Το E είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $AB = 12$  και ισχύει ότι  $AG = \Gamma\Delta = \Delta E$ .



**α)** Ποια είναι τα μήκη των τμημάτων  $AE$ ,  $EB$ ,  $AG$ ,  $\Gamma\Delta$  και  $\Delta E$ ;

**β)** Να βρείτε το λόγο  $\frac{AE}{EB}$ .

**γ)** Να βρείτε το λόγο  $\frac{AG}{\Gamma B}$ .

**22112.** Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο  $\Gamma$  είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος  $AB$ .

Έστω ότι είναι  $AB = 12\kappa$  και  $AG = 4\kappa$ , όπου  $\kappa$  θετικός αριθμός.



**α)** Να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{AG}{AB}$ .

**β)** Να υπολογίσετε

**i.** το τμήμα  $\Gamma B$  συναρτήσει του  $\kappa$ ,

**ii.** το λόγο του τμήματος  $\Gamma B$  προς το τμήμα  $AB$ .

**γ)** Να αποδείξετε ότι το τμήμα  $\Gamma B$  είναι διπλάσιο του τμήματος  $AG$  και να βρείτε το λόγο  $\lambda$  στον οποίο το σημείο  $\Gamma$  διαιρεί εσωτερικά το τμήμα  $AB$ .

**22113.** Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο  $\Gamma$  είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος  $AB$ .



Αν είναι  $AB = 16\kappa$  και  $\Gamma B = 4\kappa$ , όπου  $\kappa$  θετικός αριθμός, τότε να υπολογίσετε:

**α)** το λόγο  $\frac{\Gamma B}{AB}$ ,

**β)** το τμήμα  $AG$  συναρτήσει του  $\kappa$  και το λόγο του τμήματος  $AG$  προς το τμήμα  $AB$ ,

**γ)** το λόγο  $\lambda$  στον οποίο το σημείο  $\Gamma$  διαιρεί εσωτερικά το τμήμα  $AB$ .

**22115.** Θεωρούμε τμήμα  $AB$  και σημείο  $\Gamma$  το οποίο το διαιρεί εσωτερικά σε δυο τμήματα  $AG$  και

$\Gamma B$  σε λόγο  $\frac{AG}{\Gamma B} = \frac{1}{3}$ .

**α)** Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθένα από τα ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

**i.** Το τμήμα  $\Gamma B$  είναι

A: ίσο με το τμήμα  $AG$ .

B: διπλάσιο από το τμήμα  $AG$ .

Γ: τριπλάσιο από το τμήμα  $AG$ .

**ii.** Το σημείο  $\Gamma$

A: είναι το μέσο του τμήματος  $AB$ .

B: βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο A του τμήματος  $AB$ .

Γ: βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο B του τμήματος  $AB$ .

**β)** Να δείξετε ότι το τμήμα  $AB$  είναι τετραπλάσιο του τμήματος  $AG$ .

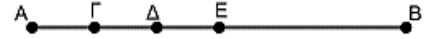
**γ)** Να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{\Gamma B}{AB}$ .



4<sup>ο</sup> Θέμα

19523. Τα σημεία Γ, Δ και Ε είναι σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ώστε το Ε να είναι μέσο του ΑΒ και  $ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ$ .

α) Αν  $ΑΒ = 12$ , ποια είναι τα μήκη των τμημάτων ΕΑ και ΑΓ;



β) Να βρείτε το λόγο  $\lambda_1 = \frac{ΕΑ}{ΕΒ}$  που το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΑΒ.

γ) Να βρείτε το λόγο  $\lambda_2 = \frac{ΓΑ}{ΓΒ}$  που το σημείο Γ διαιρεί το τμήμα ΑΒ.

## Θεώρημα Θαλή

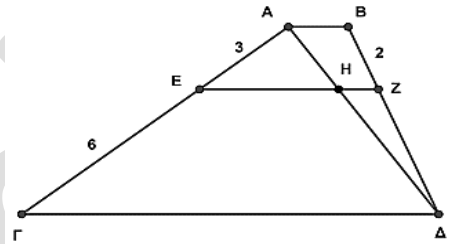
2<sup>ο</sup> Θέμα

19643. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΕΖ και ΓΔ είναι παράλληλα.

Αν έχουμε ότι  $ΑΕ = 3$ ,  
 $ΕΓ = 6$  και  $ΒΖ = 2$ , τότε:

α) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΖ.

β) να αποδείξετε ότι  $ΗΔ = 2 \cdot ΑΗ$ .



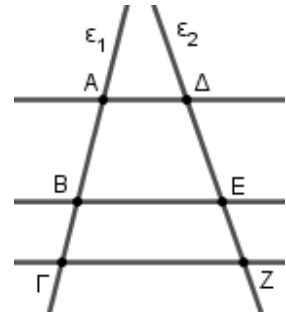
19828. Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .

Αν είναι  $ΑΒ = 12$ ,  $ΔΕ = 15$  και  $ΕΖ = 10$ ,

α) να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{ΕΖ}{ΔΕ}$ .

β) να δείξετε ότι  $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$ .

γ) να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.



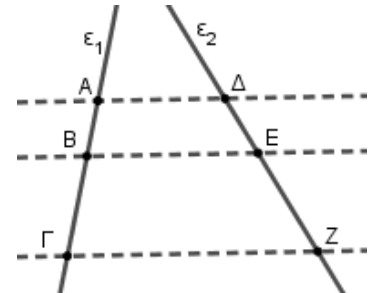
19835. Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα.

Αν είναι  $ΑΒ = 4$ ,  $ΒΓ = 8$  και  $ΔΖ = 18$ , τότε

α) να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ ,

β) να αιτιολογήσετε γιατί είναι  $\frac{ΔΕ}{ΔΖ} = \frac{1}{3}$ ,

γ) να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΔΕ και ΕΖ.



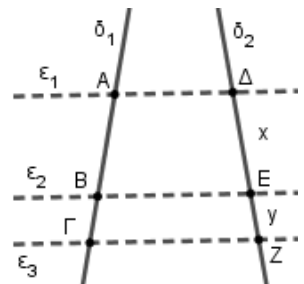
22116. Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Έστω ότι είναι  $ΑΒ = 10$  και  $ΒΓ = 3$ .

α) Να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$ .

β) i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην αναλογία που ακολουθεί,

αιτιολογώντας την απάντησή σας:  $\frac{ΑΒ}{\dots} = \frac{\dots}{ΕΖ} = \frac{ΑΓ}{\dots}$

ii. Να δείξετε ότι  $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{y}{x}$ , όπου  $x = ΔΕ$  και  $y = ΕΖ$ .



γ) Αν είναι  $y = 4$ , να υπολογίσετε το  $x$ .

**22108.** Οι  $\Delta Z$  και  $E H$  είναι παράλληλες με την πλευρά  $AB$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και τέμνουν την πλευρά  $GA$  στα σημεία  $\Delta, E$  και την πλευρά  $GB$  στα σημεία  $Z, H$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $\Gamma\Delta = 3$ ,  $\Delta E = 6$  και  $ZH = 4$ .

**α) i.** Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω αναλογία, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο  $GEH$ , στο οποίο η  $\Delta Z$  είναι παράλληλη στην πλευρά του  $EH$ .

$$\frac{\Gamma Z}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta E}$$

**ii.** Να αποδείξετε ότι  $\Gamma Z = 2$ .

**β) i.** Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω αναλογία, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο  $GAB$ , στο οποίο η  $EH$  είναι παράλληλη στην πλευρά του  $AB$ .

$$\frac{\dots}{\Gamma H} = \frac{EA}{\dots}$$

**ii.** Αν επιπλέον είναι  $HB = 1$ , να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $EA$ .

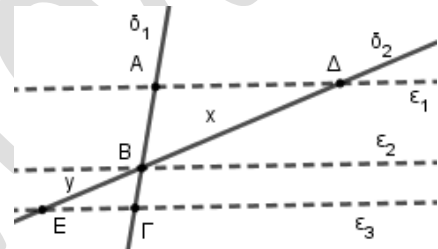
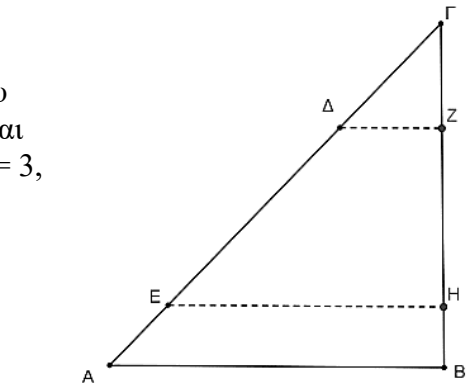
**22117.** Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες  $\delta_1, \delta_2$  στα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta, B, E$  αντίστοιχα.

Έστω ότι είναι  $AB = 14$  και  $B\Gamma = 4$ .

**α)** Να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{AB}{B\Gamma}$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι  $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{x}{y}$ , όπου  $x = B\Delta$  και  $y = BE$ .

γ) Αν είναι  $x = 16$ , να υπολογίσετε το  $y$ .

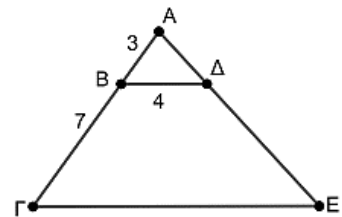


#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**19520.** Δίνεται το τραπέζιο  $B\Gamma E\Delta$  του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές  $\Gamma B$  και  $E\Delta$  όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο  $A$ . Επιπλέον δίνεται ότι  $AB = 3$ ,  $B\Gamma = 7$  και  $B\Delta = 4$ .

**α)** Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών  $A\Gamma$  και  $\Gamma E$  του τριγώνου  $A\Gamma E$ .

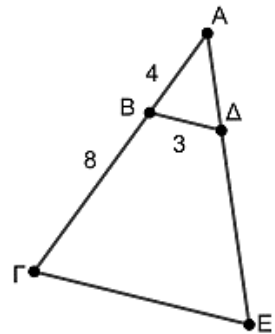
**β)** Αν επιπλέον το  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $A E$  του τριγώνου  $A\Gamma E$ .



**19521.** Δίνεται το τραπέζιο  $B\Gamma E\Delta$  του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές  $\Gamma B$  και  $E\Delta$  όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο  $A$ , όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Επιπλέον δίνεται ότι  $AB = 4$ ,  $B\Gamma = 8$  και  $B\Delta = 3$ .

**α)** Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $\Gamma E$ .

**β)** Αν επιπλέον το  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Delta$ , να βρείτε την περίμετρο του τραπέζιου.



**19522.** Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επιπλέον δίνεται ότι  $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{2}{3}$  και ΓΕ = 6.

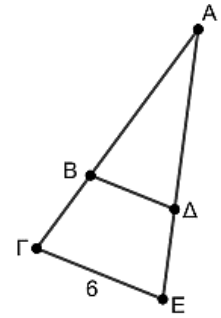
σχήμα. Επιπλέον δίνεται ότι  $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{2}{3}$  και ΓΕ = 6.

**α)** Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΔ.

**β)** Αν επιπλέον το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και ΑΕ = 12:

**i.** να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

**ii.** να υπολογίσετε τα μήκη των υπόλοιπων πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ.



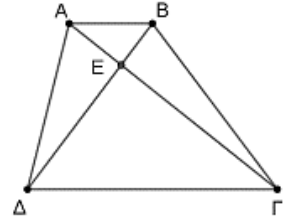
Ασκησίοποιλις

## Ομοιότητα

### Κριτήρια ομοιότητας

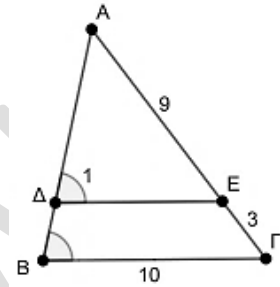
#### 2<sup>ο</sup> Θέμα

- 19274.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $\Gamma\Delta = 3AB$ . Οι διαγωνίες του  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  τέμνονται στο σημείο  $E$ .
- α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AEB$  και  $\Delta E\Gamma$  είναι όμοια.
- β)** Να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{E\Gamma}{EA}$ .



- 19517.** Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι σημεία των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$ , αντίστοιχα, του τριγώνου  $AB\Gamma$ , ώστε  $AE = 9$ ,  $E\Gamma = 3$  και η γωνία  $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}\Delta E$  είναι ίση με τη γωνία  $B$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

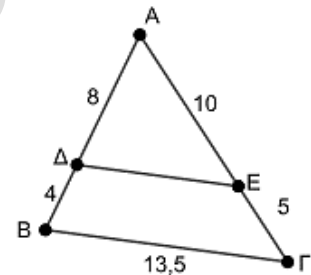
- α)** Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $A\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- β)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{3}{4}$ .



- γ)** Αν επιπλέον  $B\Gamma = 10$ , να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $\Delta E$  του τριγώνου  $A\Delta E$ .

- 19518.** Τα  $\Delta$  και  $E$  είναι σημεία των πλευρών του τριγώνου  $AB\Gamma$ , ώστε  $A\Delta = 8$ ,  $B\Delta = 4$ ,  $A\Gamma = 10$  και  $E\Gamma = 5$ . Επίσης  $B\Gamma = 13,5$ .

- α)** Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- β)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{2}{3}$ .



- γ)** Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $\Delta E$  του τριγώνου  $A\Delta E$ .

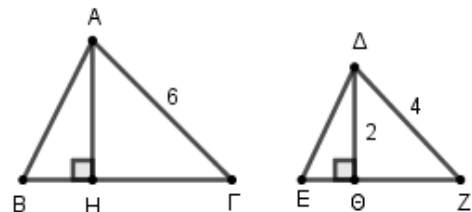
- 19644.** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  του παρακάτω σχήματος έχουν  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$  και  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ .

Αν γνωρίζουμε ότι  $A\Gamma = 6$ ,  $\Delta Z = 4$  και  $\Delta\Theta = 2$ , τότε:

- α)** να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AH\Gamma$  και  $\Delta\Theta Z$  είναι όμοια.

- β)** να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $AH$ .

- γ)** να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{H\Gamma}{\Theta Z}$ .



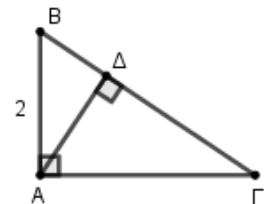
- 19645.** Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του παρακάτω σχήματος, με την υποτείνουσα του

$B\Gamma = 4$  και την κάθετη πλευρά του  $AB = 2$ .

Αν  $A\Delta$  το ύψος του τριγώνου τότε:

- α)** να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $AB\Delta$  είναι όμοια.

- β)** να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $B\Delta$ .



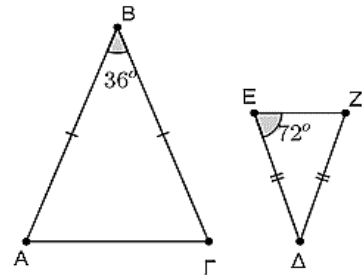
**20956.** Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΑΓ με  $BA = BG$  και ΔΕΖ με  $DE = DZ$ . Δίνεται επίσης ότι  $\hat{B} = 36^\circ$ ,  $\hat{E} = 72^\circ$  και  $AB = 2DE$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\hat{A} = 36^\circ$ .

ii.  $BG = 2DZ$ .

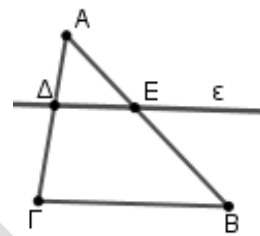
β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.



**21002.** Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΕ, αν είναι  $AD = 2$ ,  $AG = 6$  και  $BG = 4$ .

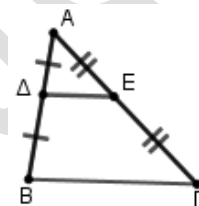


**21005.** Έστω Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τριγώνου ΑΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί  $DE \parallel BG$ .

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

γ) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ.



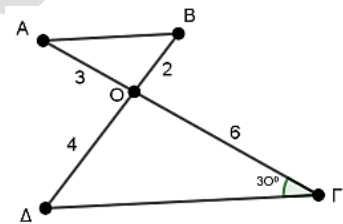
**21270.** Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν  $OA = 3$ ,  $OB = 2$ ,  $OG = 6$ ,  $OD = 4$  και η γωνία ΟΓΔ ισούται με  $30^\circ$  τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια.

β) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων:

$$\frac{OA}{\dots} = \frac{\dots}{OD} = \frac{AB}{\dots}$$

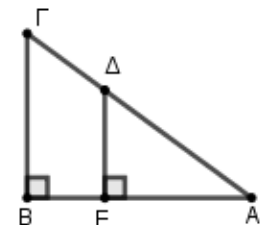
γ) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΟΑΒ.



**21305.** Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{AED}$  είναι ορθές.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.



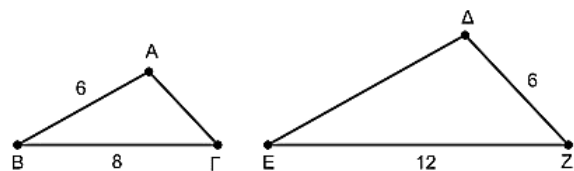
**21390.** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ στο παρακάτω σχήμα είναι όμοια και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η ΕΖ. Δίνονται επίσης  $AB = 6$ ,  $BG = 8$ ,  $DZ = 6$  και  $EZ = 12$ .

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας των

τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι  $\frac{2}{3}$ .

β) Να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων  $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{AG}{\dots}$ .

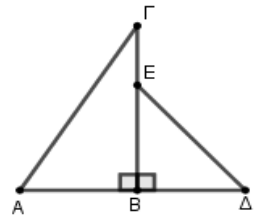
γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΔΕ.



22241. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta BE$  είναι όμοια.

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $\Delta BE$ .

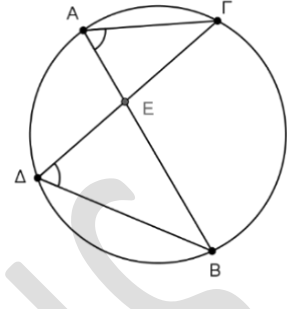


35258. Οι χορδές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο  $E$  και οι γωνίες με κορυφές τα σημεία  $A$  και  $\Delta$  είναι ίσες, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα  $AE\Gamma$  και  $\Delta EB$  είναι όμοια.

β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.



35389. Θεωρούμε τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\Delta\hat{A}B = 130^\circ$ ,

$A\hat{B}\Gamma = 110^\circ$  και τις απέναντι γωνίες τους παραπληρωματικές.

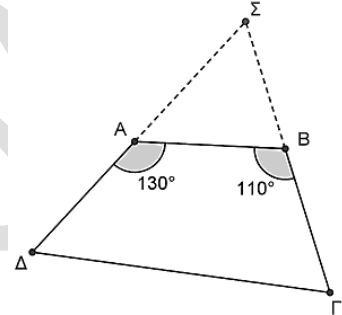
Έστω ότι οι απέναντι γωνίες του

$AB\Gamma\Delta$  είναι παραπληρωματικές και  $\Sigma$  το σημείο στο οποίο τέμνονται οι πλευρές του  $\Delta A$  και  $\Gamma B$  προεκτεινόμενες προς τα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Gamma} = 50^\circ$  και  $\hat{\Delta} = 70^\circ$ .

β) i. Να αποδείξετε ότι  $\Sigma\hat{A}B = \hat{\Gamma}$  και  $\Sigma\hat{B}A = \hat{\Delta}$ .

ii. Τα τρίγωνα  $\Sigma AB$  και  $\Sigma\Delta\Gamma$  είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

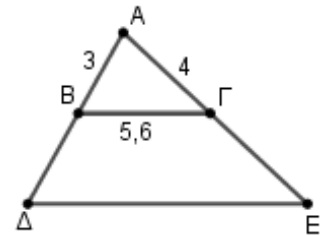
18208. Η πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι παράλληλη στην πλευρά  $\Delta E$  του τριγώνου  $A\Delta E$ . Επίσης δίνονται  $AB = 3$ ,  $B\Gamma = 5,6$  και  $A\Gamma = 4$ .

α) Αν  $A\Delta = 6$  να υπολογίσετε:

i. το μήκος της πλευράς  $A E$  του τριγώνου  $A\Delta E$ .

ii. το μήκος της πλευράς  $\Delta E$  του τριγώνου  $A\Delta E$ .

β) Αν  $A\Delta = 9$  να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $\Delta E$  του τριγώνου  $A\Delta E$ .

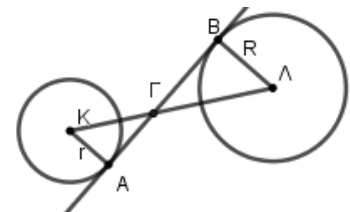


20880. Μια ευθεία ( $\epsilon$ ) εφάπτεται στους κύκλους  $(K, r)$  και  $(\Lambda, R)$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω  $\Gamma$  το σημείο τομής της διακέντρου  $K\Lambda$  και της ευθείας ( $\epsilon$ ).

α) Να αιτιολογήσετε ότι οι γωνίες  $K\hat{A}\Gamma$  και  $\Lambda\hat{B}\Gamma$  είναι ορθές.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $K\Lambda\Gamma$  και  $\Lambda B\Gamma$  είναι όμοια

γ) Ποια είναι η θέση του σημείου  $\Gamma$  στη διάκεντρο  $K\Lambda$  όταν η ακτίνα  $R$  είναι διπλάσια της ακτίνας  $r$ ;



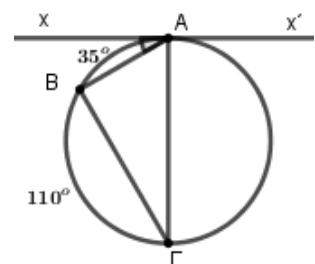
21015. Στο διπλανό σχήμα η  $xx'$  είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $A$  και επιπλέον ισχύουν:

$B\hat{A}x = 35^\circ$  και  $B\hat{\Gamma} = 110^\circ$ .

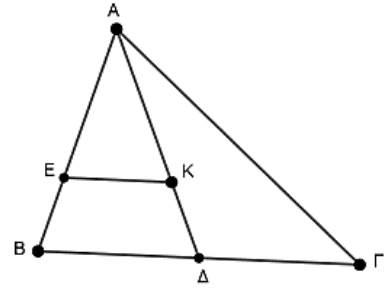
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\Gamma$ .

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

γ) Να αποδείξετε ότι η χορδή  $A\Gamma$  είναι διάμετρος του κύκλου.



**21021.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, η ΑΔ είναι διάμεσος και το σημείο Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Από το Κ φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Δίνεται ότι η ΑΒ = 6.

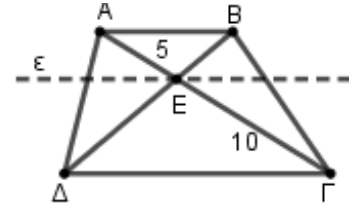


α) Να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{AK}{AD}$ .

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΒΔ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΕ.

**21842.** Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. Αν ΑΕ=5 και ΕΓ=10 :

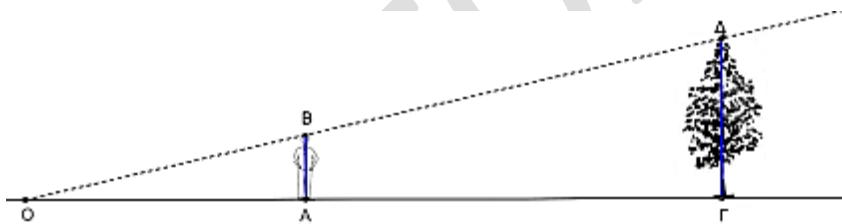


α) Να αποδείξετε ότι  $\frac{BE}{ED} = \frac{1}{2}$ .

β) Αν ΒΔ = 12 να βρείτε το μήκος των τμημάτων ΒΕ και ΔΕ.

γ) Να δικαιολογήσετε ότι  $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$ .

**22247.** Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά ΓΟ μήκους 12 m. Την ίδια στιγμή, ένας μαθητής, ύψους 1,75 m, για να βρει το ύψος του δέντρου στέκεται σε ένα σημείο πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε, η σκιά του ΑΟ και η σκιά ΓΟ του δέντρου να βρίσκονται στην ίδια ευθεία και να έχουν το ίδιο άκρο Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ο μαθητής μετράει τη σκιά του εκείνης της χρονικής στιγμής και βρίσκει ότι έχει μήκος 2 m. Να θεωρήσετε ότι τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ του σχεδίου αναπαριστούν τα ύψη του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και ότι είναι κάθετα στην ΟΓ.



α) i. Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

β) Η γραπτή λύση που έδωσε ένας μαθητής στο ερώτημα α)ii. είναι η παρακάτω.

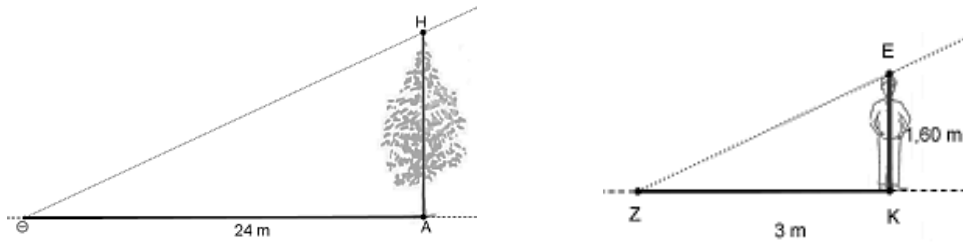
$$\text{«α)ii. } \frac{AB}{OA} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma A} \Leftrightarrow \frac{1,75}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{12-2} \Leftrightarrow 2\Gamma\Delta = 1,75 \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Gamma\Delta = \frac{17,5}{2} = 8,75\text{m} \text{»}. \text{ Είναι η λύση του μαθητή σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.}$$

**22246.** Το φως όταν κινείται μέσα σε ομογενή υλικά, διαδίδεται ευθύγραμμα και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ευθείες γραμμές (φωτεινές ακτίνες) για να αναπαραστήσουμε το ίχνος της διαδρομής του. Όταν η πηγή του φωτός βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, όπως ο ήλιος, οι φωτεινές ακτίνες θεωρούνται παράλληλες μεταξύ τους. Ένας άνθρωπος ύψους 1,6m ρίχνει κάποια στιγμή σκιά μήκους 3m. Την ίδια χρονική στιγμή και πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο ένα δέντρο ρίχνει σκιά μήκους 24m.

Τα σχέδια της εικόνας που ακολουθεί αναπαριστούν τις δυο περιπτώσεις. Να θεωρήσετε ότι οι ΖΕ και ΘΗ αναπαριστούν τις φωτεινές ακτίνες του ήλιου και είναι παράλληλες μεταξύ τους, τα τμήματα ΚΖ, ΑΘ αναπαριστούν τις σκιές του δέντρου και του ανθρώπου και είναι

παράλληλα μεταξύ τους και, τα δε τμήματα  $KE$ ,  $AH$  αναπαριστούν τα αντίστοιχα ύψη τους, τα οποία είναι κάθετα στα  $KZ$ ,  $A\Theta$ .



**α) i.** Είναι όμοια τα τρίγωνα  $ZKE$  και  $\Theta AH$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**ii.** Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

(Σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

**β)** Η γραπτή λύση που έδωσε ένας μαθητής στο ερώτημα α).i. είναι η ακόλουθη:

«Τα δύο τρίγωνα  $KZE$  και  $A\Theta H$  είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια».

Ο καθηγητής του μαθητή του είπε ότι ο συλλογισμός του έχει λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

### 3<sup>ο</sup> Θέμα

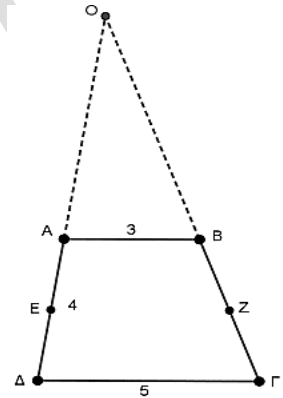
**21014.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $E$ ,  $Z$  τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Αν  $AB = 3$ ,  $\Delta\Gamma = 5$ ,

$A\Delta = 4$  και οι μη παράλληλες πλευρές του  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  τέμνονται στο  $O$ , τότε:

**α)** να υπολογίσετε το μήκος του  $EZ$ .

**β)** να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OAB$  και  $OEZ$  είναι όμοια.

**γ)** να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $OA$ .



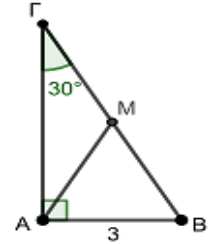


## Μετρικές σχέσεις Πυθαγόρειο Θεώρημα 2<sup>ο</sup> Θέμα

**18203.** Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  και  $AB = 3$ .

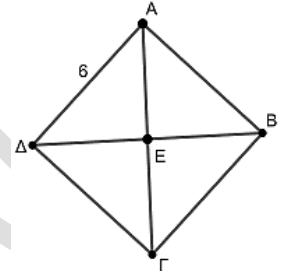
Το  $M$  είναι μέσο της υποτεινούσας του  $AB\Gamma$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 6$ .
- β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $AM$ .
- γ) Να υπολογίσετε το μήκος της κάθετης πλευράς  $A\Gamma$  του  $AB\Gamma$ .



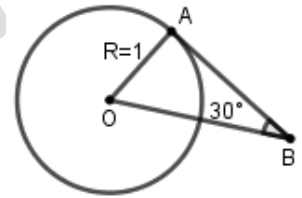
**18207.** Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο με περίμετρο 24 και  $A\Delta = 6$ .

- α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του  $AB\Gamma\Delta$  και να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος.
- β) Αν επιπλέον  $A\Gamma = 6\sqrt{2}$  να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο.



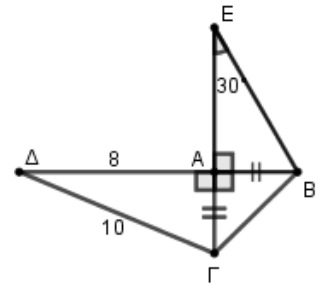
**18306.** Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R = 1$ . Θεωρούμε το εφαπτόμενο τμήμα  $BA$  ώστε  $\hat{O}BA = 30^\circ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α) Να αιτιολογήσετε ότι η γωνία  $\hat{O}AB$  είναι ορθή.
- β) Να αποδείξετε ότι  $OB = 2$ .
- γ) Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος  $BA$ .



**18314.** Στο σχήμα δίπλα είναι  $AB = A\Gamma$ ,  $A\Delta = 8$ ,  $\Delta\Gamma = 10$  και  $\hat{A}\hat{E}B = 30^\circ$ .

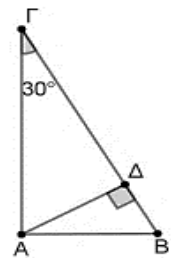
- α) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = 6$ .
- β) Να υπολογίσετε την υποτεινούσα  $BE$  του ορθογωνίου τριγώνου  $ABE$ .



**19272.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με

$B\Gamma = 8$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

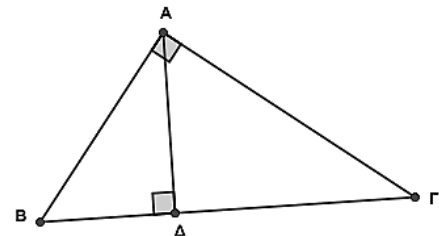
- α) Να αποδείξετε ότι  $AB = 4$ .
- β) Φέρουμε το ύψος  $A\Delta$ . Να υπολογίσετε το τμήμα  $B\Delta$ .



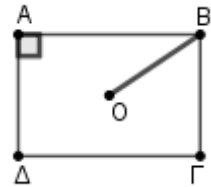
**19646.** Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  του παρακάτω σχήματος είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $B\Gamma = 10$  και  $A\Gamma = 8$ .

Αν  $A\Delta$  είναι το ύψος του από την κορυφή  $A$  να υπολογίσετε το μήκος:

- α) της πλευράς  $AB$ .
- β) του τμήματος  $\Delta\Gamma$ .
- γ) του τμήματος  $\Delta B$ .

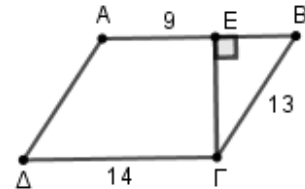


**19647.** Στο ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  του παρακάτω σχήματος το σημείο  $O$  είναι το κέντρο του. Επίσης  $OB = 5$  και  $AD = 6$ .



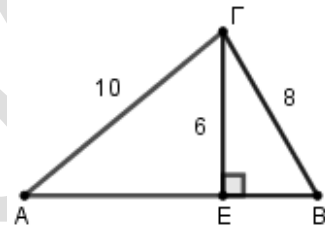
- α) Να υπολογίσετε το μήκος της  $B\Delta$ .  
 β) Πόσο είναι το μήκος της διαγωνίου  $AG$ ;  
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.  
 γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $AB$  του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ .

**20083.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $B\Gamma = 13$  και  $\Gamma\Delta = 14$ . Αν  $\Gamma E$  είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο  $\Gamma$  στην πλευρά  $AB$  και το τμήμα  $AE$  έχει μήκος 9, να αποδείξετε ότι:



- α) Το μήκος του τμήματος  $\Gamma E$  είναι 12.  
 β) Τα μήκη των πλευρών  $A\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  και  $A\Gamma$  του τριγώνου  $A\Delta\Gamma$  είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί.

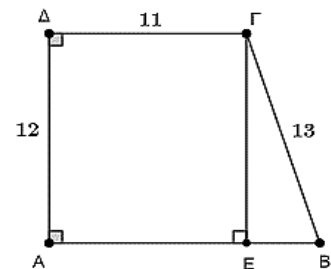
**20085.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του παρακάτω σχήματος δίνεται ότι,  $A\Gamma = 10$  και  $B\Gamma = 8$ . Το τμήμα  $\Gamma E$  είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά  $AB$  με  $\Gamma E = 6$ .



- α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:  
 Το τμήμα  $AE$  ονομάζεται προβολή της πλευράς ..... στην πλευρά .....  
 Το τμήμα .... είναι η προβολή της πλευράς  $B\Gamma$  στην πλευρά ....

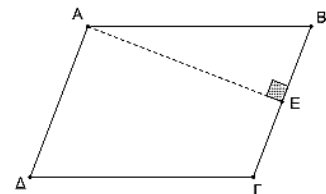
- β) i. Να υπολογίσετε το τμήμα  $AE$ .  
 ii. Να βρείτε το μήκος της πλευράς  $AB$ .

**20644.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι τραπέζιο με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $A\Delta = 12$ ,  $\Delta\Gamma = 11$ ,  $B\Gamma = 13$  και  $\Gamma E$  το ύψος του.



- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta\Gamma E$  είναι ορθογώνιο.  
 β) Να αποδείξετε ότι  $EB = 5$ .  
 γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου.

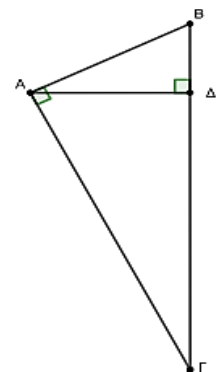
**20662.** Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο,  $E$  είναι το μέσο της πλευράς του  $B\Gamma$  και η  $AE$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$ . Αν  $AB = 13$  και  $BE = 5$ , να βρείτε το μήκος:



- α) της πλευράς  $A\Delta$  του παραλληλογράμμου.  
 β) του ευθύγραμμου τμήματος  $AE$ .

**20841.** Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά του είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 3 cm. Αν οι δύο κάθετες πλευρές έχουν άθροισμα 21 cm, τότε :

- α) Να δείξετε ότι οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 9 cm και 12 cm.  
 β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου.

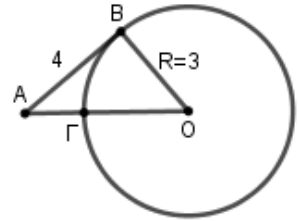


**20842.** Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  οι προβολές  $\Delta B$  και  $\Delta\Gamma$  των κάθετων πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  στην υποτείνουσα  $B\Gamma$  έχουν μήκη 3 cm και 12 cm αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ύψους  $A\Delta$  προς την υποτείνουσα  $B\Gamma$  είναι 6.

β) Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές  $AB$  και  $AΓ$  του τριγώνου.

**20871.** Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R = 3$ . Θεωρούμε το εφαπτόμενο τμήμα  $AB$  ώστε  $AB = 4$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αιτιολογήσετε ότι η γωνία  $O\hat{B}A$  είναι ορθή.

β) Να αποδείξετε ότι  $OA = 5$ .

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $AΓ$ .

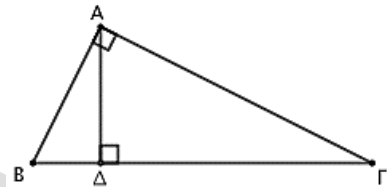
**20873.** Στο διπλανό σχήμα, το  $A\Delta$  είναι το ύψος στην υποτείνουσα  $B\Gamma$  του ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Αν είναι  $B\Gamma = 10$  και  $\Delta\Gamma = 8$ , τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $B\Delta$ .

β) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = 4$ .

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $AB$ .



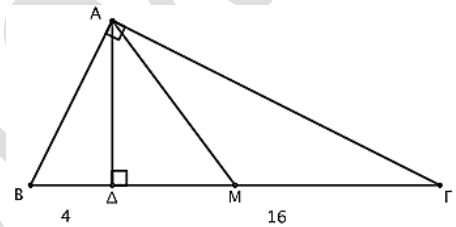
**20876.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) του σχήματος, το  $A\Delta$  είναι ύψος και το  $AM$  διάμεσος.

Αν  $B\Delta = 4$  και  $\Delta\Gamma = 16$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $A\Delta = 8$     ii.  $AB = 4\sqrt{5}$ .

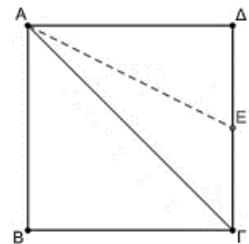
β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο  $AM$ .



**21064.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς 2 και  $E$  είναι το μέσο της  $\Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $A\Gamma = 2\sqrt{2}$ .

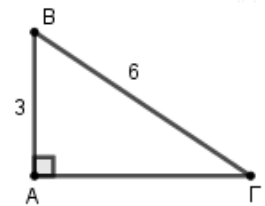
β)  $AE = \sqrt{5}$ .



**21273.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του παρακάτω σχήματος η  $AB = 3$  και η  $B\Gamma = 6$ . Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας  $\Gamma$ .

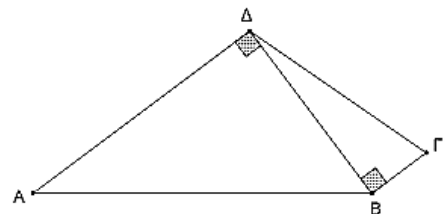
β) το μήκος της πλευράς  $A\Gamma$ .



**22096.** Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $B\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνια με  $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma = 90^\circ$  και  $A\Delta = 16$ ,  $B\Gamma = 5$  και  $\Gamma\Delta = 13$ .

α) Να αποδείξετε  $B\Delta = 12$ .

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $AB$  και την περίμετρο του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ .

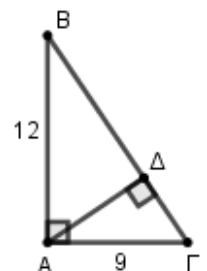


**20654.** Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με

κάθετες πλευρές  $AB = 12$  και  $A\Gamma = 9$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 15$ .

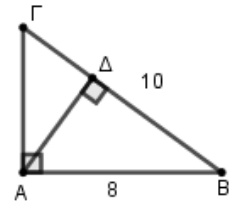
β) Αν  $A\Delta$  είναι το ύψος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $\Delta\Gamma$ .



**22240.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $AB = 8$  και  $B\Gamma = 10$ .

**α)** Να υπολογίσετε το μήκος της κάθετης πλευράς  $A\Gamma$ .

**β)** Έστω  $\Delta\Delta$  το ύψος στην υποτείνουσα  $B\Gamma$ . Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής  $\Delta B$  της κάθετης πλευράς  $AB$  πάνω στη  $B\Gamma$ .



#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**18352.** Έστω  $O$  το κέντρο ρόμβου  $AB\Gamma\Delta$  με μήκη διαγωνίων  $\Delta B = 6$  και  $A\Gamma = 8$ .

**α)** Να υπολογίσετε την πλευρά του ρόμβου.

**β)** Θεωρούμε σημεία  $E$  και  $Z$  εσωτερικά των τμημάτων  $OA$  και  $OG$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $EO = OZ$ .

**i.** Πόσο πρέπει να είναι το μήκος καθενός από τα τμήματα  $EO$  και  $OZ$  ώστε το τετράπλευρο  $EBZ\Delta$  να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**ii.** Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου  $EBZ\Delta$  του προηγούμενου ερωτήματος.

**19519.α)** Το  $E$  είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ .

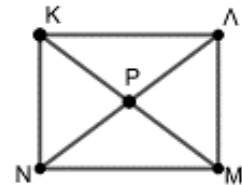
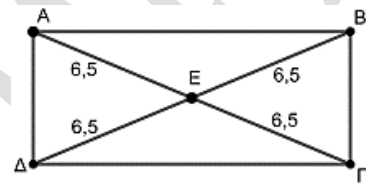
Επιπλέον ισχύει ότι  $EA = E\Gamma = E\Delta = EB = 6,5$ .

**i.** Να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο.

**ii.** Αν επιπλέον δίνεται ότι η πλευρά  $A\Delta = 5$ , να βρείτε το μήκος της πλευράς  $AB$  του  $AB\Gamma\Delta$ .

**β)** Μια ταμπέλα έχει το σχήμα του τετραπλεύρου  $K\Lambda MN$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σας δίνεται ότι οι διαγώνιοι του  $KM$  και  $\Lambda N$  τέμνονται στο  $P$  και έχει  $PK = P\Lambda = PM = 2,5$ .

Ένας συμμαθητής σας, ο Κώστας γνωρίζει επιπλέον το μήκος του  $PN$  και βγάζει, σωστά, το συμπέρασμα ότι η ταμπέλα είναι σχήματος ορθογωνίου. Πόσο είναι το μήκος του  $PN$ ;



**18160.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 8\sqrt{3}$ , το ύψος του  $B\Delta$  και το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$ .

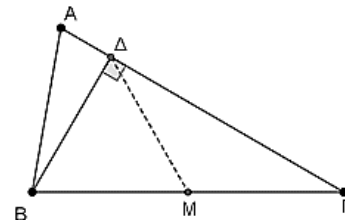
**α)** Να αποδείξετε ότι  $\Delta M = 4\sqrt{3}$ .

**β)** Αν  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  και  $AB = 8$ :

**i.** Να υπολογίσετε την  $M\hat{\Delta}\Gamma$ .

**ii.** Να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{B\Delta}{B\Gamma}$ .

**iii.** Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $A\Delta$ .



**19843.** Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο με διαγώνιο  $ZE = 60$  και το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο με πλευρά  $AB = 16$ .

Αν είναι  $ZA = \Gamma E = 20$ , τότε:

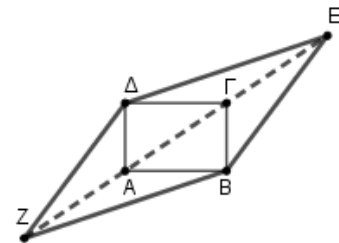
**α)** Να αποδείξετε ότι  $ZA = A\Gamma = \Gamma E$ .

**β)** Να υπολογίσετε:

**i.** το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$  και την περίμετρο του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ ,

**ii.** τη διαγώνιο  $\Delta B$  του παραλληλογράμμου  $\Delta EBZ$ .

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



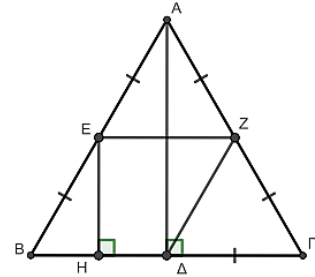
**20849.** Σε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 12,  $AD$  είναι το ύψος του και  $E, Z$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα. Αν το τμήμα  $EH$  είναι κάθετο στην πλευρά  $BG$ , με  $H$  σημείο της  $BG$ , τότε :

**α)** Να αποδείξετε ότι :

**i.**  $EZ \parallel HD$       **ii.**  $EZ = 6$  και  $HD = 3$ .

**β)** Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο  $EZDH$  είναι παραλληλόγραμμο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**γ)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EZDH$  είναι τραπέζιο, του οποίου η βάση του  $EZ$  είναι ίση με τη μία από τις μη παράλληλες πλευρές του  $\Delta Z$ .



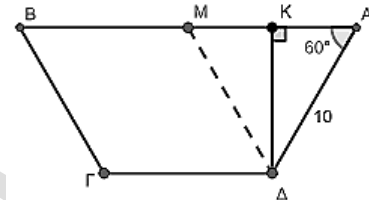
**20850.** Στο διπλανό σχήμα το τραπέζιο  $ABGD$  είναι ισοσκελές και η μεγάλη βάση του  $AB$  είναι διπλάσια από την πλευρά  $AD$ . Επιπλέον η γωνία  $A$  είναι  $60^\circ$  και η πλευρά  $AD$  είναι 10 cm.

**α)** Να υπολογίσετε το ύψος  $\Delta K$  του τραpezίου.

**β)** Αν  $M$  είναι το μέσο της  $AB$  να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τρίγωνο  $\Delta MA$  είναι ισόπλευρο.

**ii.** Το τετράπλευρο  $\Delta MBG$  είναι ρόμβος.

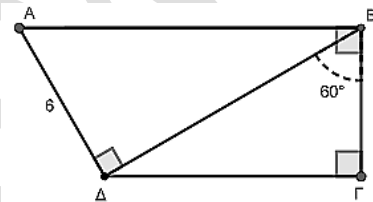


**20852.** Στο τραπέζιο  $ABGD$  του παρακάτω σχήματος με  $AB \parallel GD$ , είναι  $\hat{B} = \hat{G} = 90^\circ$ . Η πλευρά  $AD$  είναι 6 και η διαγώνιος  $BD$  είναι κάθετη στην πλευρά  $AD$  και σχηματίζει με την πλευρά  $BG$  γωνία  $\hat{\Delta BG} = 60^\circ$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η βάση  $AB$  του τραpezίου είναι 12.

**β)** Να υπολογίσετε τη διαγώνιο  $BD$ .

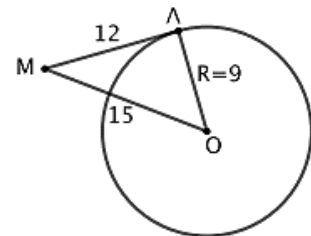
**γ)** Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραpezίου  $ABGD$  είναι  $27 + 3\sqrt{3}$ .



**20877.α)** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $ABG$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $AB = 12$  και  $BG = 15$ . Να υπολογίσετε την κάθετη πλευρά  $AG$ .

**β)** Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι στο σχήμα, «το  $ML$  είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου  $(O, R)$  στο σημείο του  $\Lambda$ ».

Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής και να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

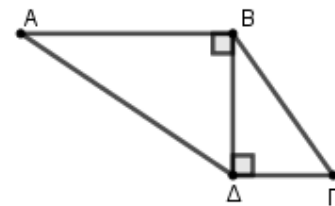


**22097.** Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα  $ABD$  και  $BGD$  είναι ορθογώνια με  $\hat{A}BD = \hat{B}DG = 90^\circ$  και  $AB = 9$ ,  $BD = 8$  και  $GD = 6$ .

**α)** Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $BG$ .

**β)** Να αποδείξετε  $AD = \sqrt{145}$ .

**γ)** Να αποδείξετε  $AG = 17$ .



**22203.** Μια ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται στους κύκλους  $(K, r)$  και  $(\Lambda, R)$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αν  $r = 3$ ,  $R = 5$ ,  $AB = 11$  και  $KG \perp BL$ , τότε:

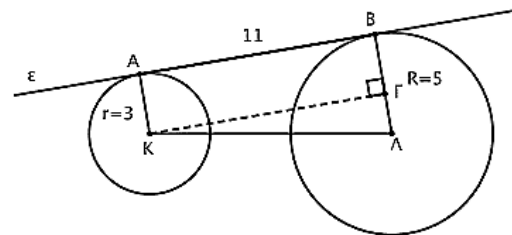
**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ABGK$  είναι ορθογώνιο.

**β)** Να υπολογίσετε:

**i.** Τα μήκη των τμημάτων  $KG$  και  $GL$ .

**ii.** Την απόσταση των κέντρων  $K$  και  $\Lambda$ .

**γ)** Τι είδους τετράπλευρο θα είναι το  $ABAK$  όταν οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες;



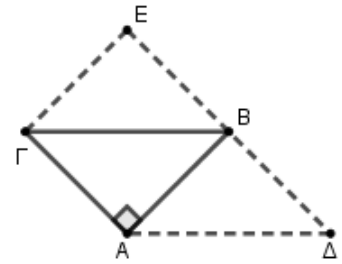
**22245.** Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $AB = A\Gamma = 14$  και  $B$  σημείο του τμήματος  $\Delta E$ . Αν είναι  $A\Delta \parallel \Gamma B$ ,  $AB \parallel \Gamma E$  και  $A\Gamma \parallel \Delta E$  τότε:

**α)** Να αποδείξετε ότι

**i.** το τετράπλευρο  $A\Gamma B\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο,

**ii.** το τετράπλευρο  $A\Gamma E B$  είναι τετράγωνο.

**β)** Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου  $A\Gamma B\Delta$  είναι ίση με  $28(\sqrt{2} + 1)$ .



**35390.** Δίνεται κύκλος κέντρου  $A$  και σημεία

του  $\Gamma$ ,  $B$  και  $\Delta$  έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  τέμνονται στο  $K$  και είναι  $KA = KB$  και  $K\Gamma = K\Delta$ .

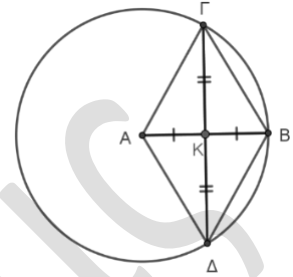
**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $A\Gamma = AB = A\Delta$ ,

**ii.** το τετράπλευρο  $A\Gamma B\Delta$  είναι ρόμβος,

**iii.**  $\hat{K}\Gamma B = 30^\circ$ .

**β)** Αν είναι  $\Gamma B = 4$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\Gamma\Delta = 4\sqrt{3}$ .

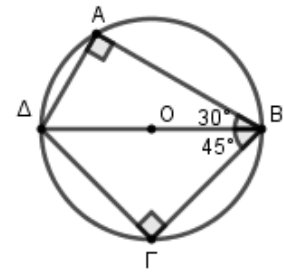


**35391.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του παρακάτω σχήματος έχει τις κορυφές του  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  και  $\Delta$  σε κύκλο με κέντρο το σημείο  $O$ , τη διαγώνιό του  $\Delta B$  διάμετρο του κύκλου και τις γωνίες του  $\hat{A}$  και  $\hat{\Gamma}$  ορθές. Έστω ότι είναι  $\hat{A}\hat{B}\Delta = 30^\circ$  και  $\hat{\Delta}\hat{B}\Gamma = 45^\circ$ .

**α)** Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι  $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Delta}\hat{B}\Gamma$ .

**γ)** Αν είναι  $B\Delta = 2$ , τότε να αποδείξετε ότι: **i.**  $A\Delta = 1$     **ii.**  $B\Gamma = \sqrt{2}$ .



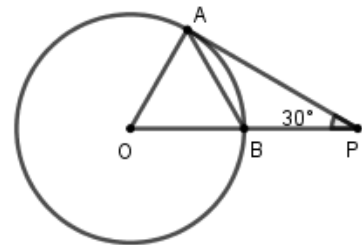
**35392.** Από σημείο  $P$  εκτός κύκλου που έχει κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$  φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα  $PA$  και την  $PO$  που τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $B$ . Έστω ότι είναι  $\hat{A}\hat{P}O = 30^\circ$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** το σημείο  $B$  είναι το μέσο του  $OP$ ,

**ii.**  $B\hat{A}P = 30^\circ$ .

**β)** Αν επιπλέον είναι  $BP = 5$ , να βρείτε την ακτίνα του κύκλου και το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος  $PA$ .



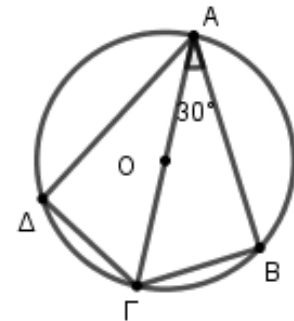
**35393.** Θεωρούμε τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του οποίου οι κορυφές είναι σημεία κύκλου κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho$  και οι πλευρές του  $B\Gamma$  και  $\Delta\Gamma$  είναι ίσες. Η διαγώνιος  $A\Gamma$  του  $AB\Gamma\Delta$  είναι διάμετρος του κύκλου και να σχηματίζει με την πλευρά  $AB$  γωνία ίση με  $30^\circ$ , δηλαδή  $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνια.

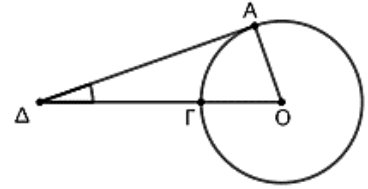
**β)** Αν είναι  $B\Gamma = \Delta\Gamma = 4$ ,

**i.** να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = 8$ ,

**ii.** να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $A\Delta$ .



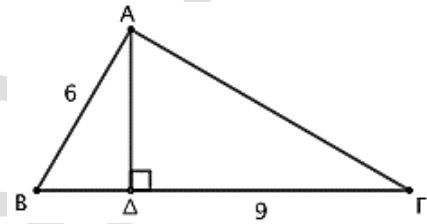
**35395.** Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και εξωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα  $\Delta A$  και τη διακεντρική ευθεία  $\Delta O$  η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $\Gamma$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α)** Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\Delta \hat{A} O$  είναι ορθή.  
**β)** Αν  $\Delta \hat{A} O = 20^\circ$ , τότε να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $A \hat{O} \Delta$ .  
**γ)** Αν είναι  $OA = 1$  και  $OD = 2$ , τότε:  
**i.** Να αποδείξετε ότι  $\Delta \hat{A} O = 30^\circ$ .  
**ii.** Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος  $A\Delta$ .

### 3<sup>ο</sup> Θέμα

**21151.** Στο παρακάτω σχήμα, το  $A\Delta$  είναι ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Αν είναι  $AB = 6$ ,  $B\Gamma = 12$  και  $\Delta\Gamma = 9$ , τότε:



- α)** Να αποδείξετε ότι:  
**i.**  $A\Delta = \sqrt{27}$ .  
**ii.**  $A\Gamma = \sqrt{108}$ .  
**β)** Να εξετάσετε αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

## Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος

2<sup>ο</sup> Θέμα

**22110.** Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $AB = 5$ ,  $B\Gamma = 5$  και  $A\Gamma = 7$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$  του τριγώνου είναι οξεία.  
 β) Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας.  
 i. Να χαρακτηρίσετε τις άλλες δύο γωνίες του τριγώνου ως οξεία ή αμβλεία.  
 ii. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

**22111.** Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $AB = 6$ ,  $A\Gamma = 6$  και  $B\Gamma = 9$ .

- α) Να δείξετε ότι η γωνία  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$  του τριγώνου είναι οξεία.  
 β) Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας.  
 i. Να χαρακτηρίσετε τη γωνία  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$  του τριγώνου, ως οξεία ή αμβλεία.  
 ii. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

4<sup>ο</sup> Θέμα

**18172.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $A\Gamma = 12$  και  $AB = 5$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 13$ .  
 β) Φέρουμε ημιευθεία  $Bx$  κάθετη στην  $B\Gamma$  στο σημείο  $B$  και παίρνουμε στην  $Bx$  σημείο  $\Delta$ , τέτοιο ώστε  $\Gamma\Delta = 14$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.  
 i. Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = 3\sqrt{3}$ .  
 ii. Να υπολογίσετε την προβολή της  $B\Delta$  στην  $\Delta\Gamma$ .

